PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO - 2008

RESUELTO

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático o no matemático) utilizado por el alumno. Penalizan los errores de cálculo. Los errores graves, y especialmente, aquellos que lleven a resultados incoherentes o absurdos, serán penalizados con la aplicación del 50 % sobre la calificación en cuestión. Se valorarán todas las partes que sean correctas, aunque el resultado final no lo sea.
Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) ¿Qué es la inversa de una matriz cuadrada? Calcula, si es posible, la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

La inversa de una matriz cuadrada M es otra matriz cuadrada de la misma dimensión que M, que se denomina M^{-1}, tal que: $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$, siendo I la matriz identidad de la misma dimensión. Para que una matriz tenga inversa (sea inversible) es condición necesaria que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = -1+4+4-1=6 \;\;;;\;\; A^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$Adj\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}}}$$

****

2º) Se consideran las rectas $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = z-2$ y $s \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}$.

a) Demostrar que se cruzan.

b) Determinar un vector director de la recta perpendicular común a los dos rectas.

----

a)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 3,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,\ 4,\ -3)$, que son linealmente independientes, por lo cual las rectas no son paralelas.

La expresión de las rectas por ecuaciones implícitas es como sigue:

$$r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ x-3z=-5 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 4x-3y=-4 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada que determinan son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar el rango de M' procedemos mediante el desarrollo por menores adjuntos de la última fila, de la siguiente forma:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_3 \rightarrow C_3 - C_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -6 & 5 \\ 4 & -3 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 24+15+54-20 = 73 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 4}$$

$$\underline{Rang\ \ M'=4 \;;;\; Rang\ \ M < 4 \Rightarrow Sistima\ \ Incompatible}$$

Las rectas r y s no tienen ningún punto en común ni son paralelas, por lo tanto:

Las rectas r y s se cruzan, c. q. d.

b)

Un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular común a las dos rectas, es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -9i + 12k + 3j - 9k - 4i + 9j = -13i + 12j + 8k = \underline{(-13,\ 12,\ 8) = \overrightarrow{w}}$$

El vector pedido es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w}$, por ejemplo:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w} = (13,\ -12,\ -8)}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$. Se pide:

a) Calcular $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Demostrar que es creciente en el intervalo $(-1,\ 1)$.

c) Determinar los extremos relativos.

d) Hacer un dibujo de la función.

----

a)

$$\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-2x+1} = \underline{\underline{0}} \quad (grado\ \ numerador < grado\ \ deno\min ador)$$

b)

Una función es creciente en un intervalo si su derivada es positiva en todos los puntos del intervalo:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-1)^2 - x\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3} = \underline{\frac{x+1}{(1-x)^3}}$$

$$\underline{\underline{f'(x) > 0,\ \forall x \in (-1,\ 1),\quad c.q.d.}}$$

c)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada; para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y si es positiva se trata de un mínimo.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x+1}{(1-x)^3} = 0 \ \ ;;\ \ x+1=0 \ \ ;;\ \ \underline{x=-1}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot(1-x)^3 - (x+1)\cdot 3(1-x)^2\cdot(-1)}{(1-x)^6} = \frac{1-x+3(x+1)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+3x+3}{(1-x)^4} = \frac{2x+4}{(1-x)^4} = \underline{\frac{2(x+2)}{(1-x)^4}}$$

$$f''(-1) = \frac{-2+4}{(-1-1)^4} = \frac{2}{16} > 0 \ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=-1}$$

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1-1)^2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } P\left(-1,\ -\frac{1}{4}\right)}}.$$

Una función tiene un punto de inflexión para los valores reales que anulan la segunda derivada y, esos valores hacen distinta de cero la tercera derivada:

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2(x+2)}{(1-x)^4}=0\ \ ;;\ \ 2(x+2)=0\ \ ;;\ \ \underline{x=-2} \Rightarrow \underline{P.\ I.\ \text{posible para } x=-2}$$

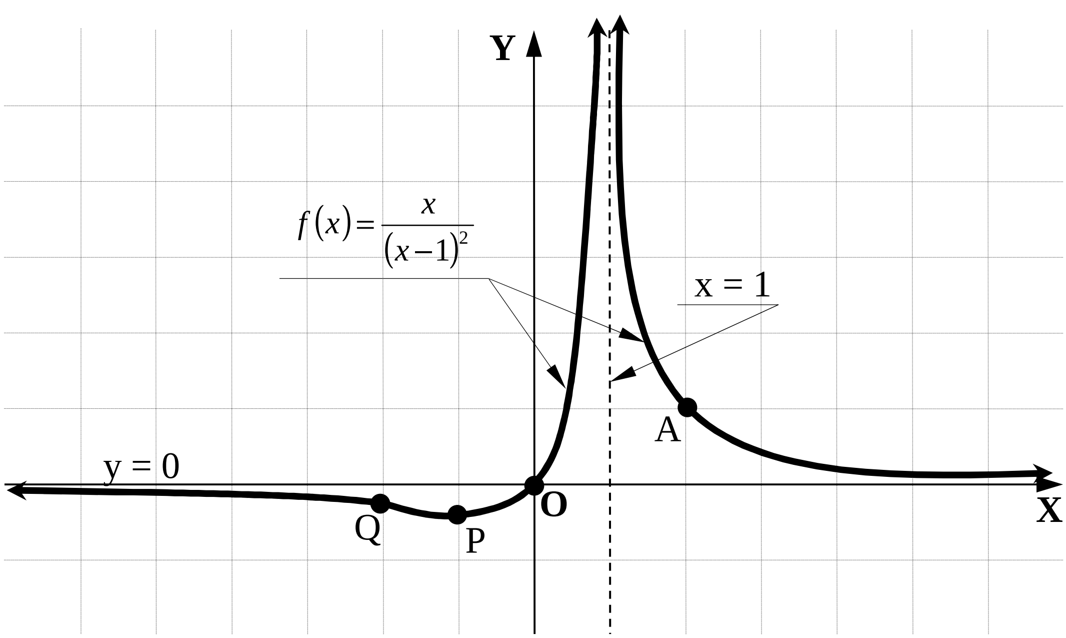
$$f'''(x)=\frac{2(1-x)^4-2(x+2)\cdot 4(1-x)^3\cdot(-1)}{(1-x)^8}=\frac{2(1-x)+8(x+2)}{(1-x)^4}=\frac{2-2x+8x+16}{(1-x)^4}=\frac{6x+18}{(1-x)^4}=\underline{\frac{6(x+3)}{(1-x)^4}}$$

$$f''(-2)=\frac{-12+18}{(1+2)^4}=\frac{2}{81}\neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Punto de inflexión para } x=-2}$$

$$f(-2)=\frac{-2}{(-2-1)^2}=-\frac{2}{9} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Punto de Inflexión: } Q\left(-2,\ -\frac{2}{9}\right)}}.$$

d)

Sabiendo que la función pasa por el origen y por el punto A(2, 1) y teniendo en cuenta lo anterior, en particular los resultados obtenidos en el apartado a), de donde se deduce que las rectas x = 1 e y = 0 son asíntotas de la función, su representación gráfica, aproximada, es la que se hace a continuación.

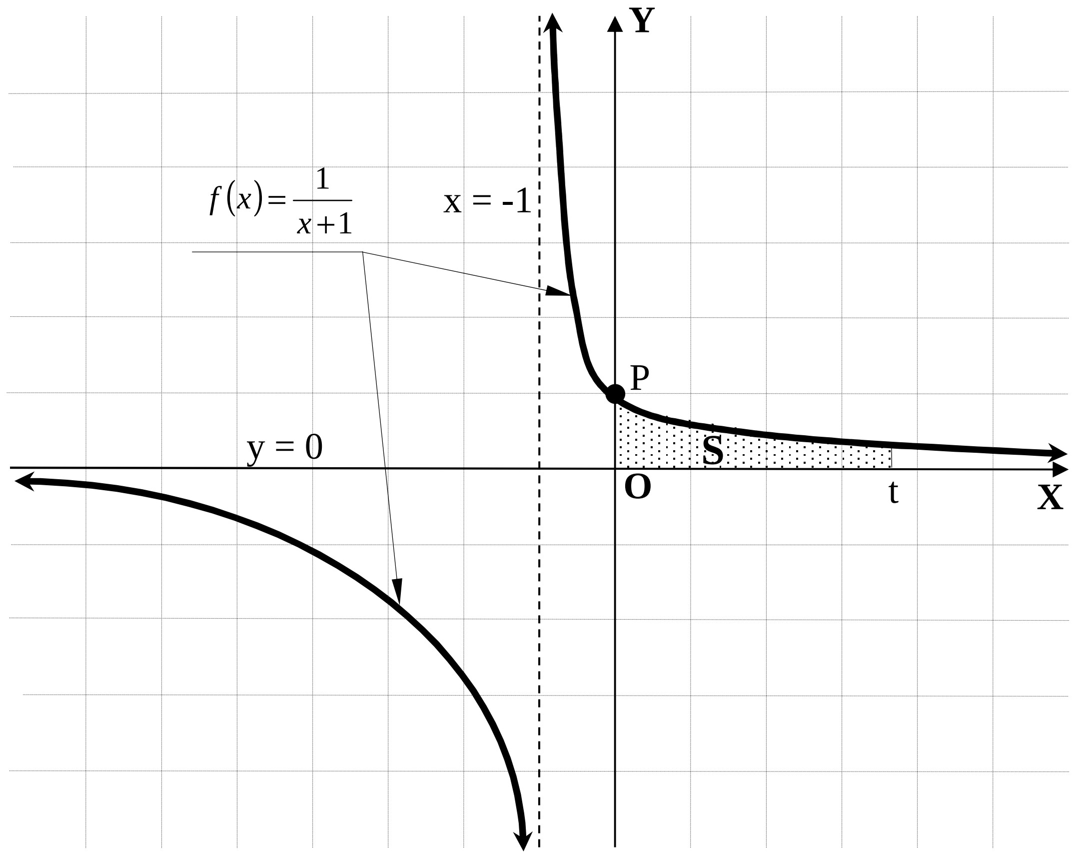


****

4º) Se considera la función $A(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x}\cdot dx,\ t>0$. Haced una interpretación geométrica (en términos de área) de esta función. Calculad una fórmula más explícita para la función A(t) y representadla gráficamente.

$$A(t)=\int_0^t \frac{1}{1+x}\cdot dx=\left[L(1+x)\right]_0^t=L(1+t)-L(1+0)=L(1+t)-L1=L(1+t)-0=\underline{\underline{L(1+t)=A(t),\quad (t>0)}}$$

La función $f(x)=\frac{1}{1+x}$ pasa por el punto P(0, 1); tiene como asíntotas a las rectas y = 0 y x = -1. Su representación gráfica aproximada es la que se indica en la figura y, la interpretación geométrica, para límites de integración 0 y t > 0, es la superficie S sombreada de la figura.



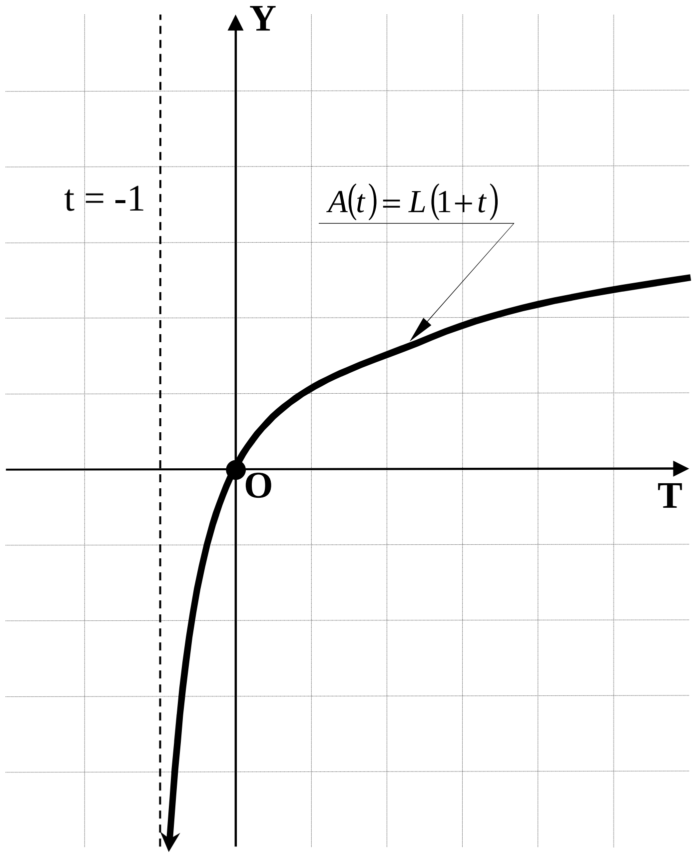
La representación gráfica de la función $A(t)=L(1+t)$ con t > 0 tiene las propiedades de las funciones logarítmicas que, en el caso que nos ocupa, son las siguientes:

El dominio es $(-1,\ +\infty)$ y el recorrido es R.

Pasa por el origen de coordenadas y tiene como asíntota a la recta t = -1.

Es monótona creciente.

Su representación gráfica, aproximada, es la que se indica a continuación:


Y
t = -1
$A(t) = L(1+t)$
O
T

****

OPCIÓN B

1º) Discute el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-4z=1 \\ mx+y+z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{array}\right\}$ y resuélvelo cuando sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 1 \\ m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los rangos, en función del parámetro m de las matrices anteriores son:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6-4m+2+4-2-6m=10-10m=10(1-m)=0 \;\Rightarrow\; \underline{m=1}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m\neq 1 \Rightarrow\;\; Rango\, M\;=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \;\Rightarrow\;\; Compatible\;\; \det er\min ado}}$$

$$Para\;\; m=1\;\; es\;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow\; Rango\;\; de\;\; M' \Rightarrow \{C_1=C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-2+3-1-4=-4\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; de\;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\; m=1 \Rightarrow\;\; Rango\, M\;=2\;\;;;\;\; Rango\; M'=3 \;\Rightarrow\;\; Incompatible}}$$

Resolvemos para el caso de m ≠ 1 por la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{10(1-m)}=\frac{3-2-4-1}{10(1-m)}=\frac{-4}{10(1-m)}=\underline{\underline{\frac{-2}{5(1-m)}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{10(1-m)}=\frac{4m+1+2-3m}{10(1-m)}=\underline{\underline{\frac{m+3}{10(1-m)}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ m & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{10(1-m)}=\frac{-2+m-1+2m}{10(1-m)}=\frac{3m-3}{10(1-m)}=\frac{-3(1-m)}{10(1-m)}=\underline{\underline{\frac{-3}{10}=z}}$$

****

2º) Se consideran los puntos A(1, -1, 1), B(2, 3, 1) y C(1, 2, 0). Se demanda:

a) Demostrar que determinan un triángulo.

b) Determinar los puntos de intersección con los ejes de coordenadas del plano que contiene al triángulo.

----

a)

Para demostrar que los puntos A(1, -1, 1), B(2, 3, 1) y C(1, 2, 0) determinan un triángulo basta con demostrar que no están alineados, o sea que los vectores que determinan, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, son linealmente independientes.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 3,\ 1) - (1,\ -1,\ 1) = (1,\ 4,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 2,\ 0) - (1,\ -1,\ 1) = (0,\ 3,\ -1)$$

Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes: $\frac{1}{0} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{0}{-1}$.

<u>Los puntos A, B y C forman un triángulo, c. q. d.</u>

b)

La ecuación general del plano π que determinan los tres puntos se determina por sus vectores directores, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y uno cualquiera de los puntos, por ejemplo:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -4(x-1) + 3(z-1) + (y+1) = 0 \ ;;$$

$$-4x + 4 + 3z - 3 + y + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 4x - y - 3z - 2 = 0}$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 4x - y - 3z - 2 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 2 = 0 \ ;;\ x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{M\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)}}$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 4x - y - 3z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow -y - 2 = 0 \ ;;\ y = -2 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{N(0,\ -2,\ 0)}}$$

$$Eje\ \ Z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi \equiv 4x - y - 3z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3z - 2 = 0 \ ;; \ z = -\frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(0,\ 0,\ -\frac{2}{3}\right)}}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Se pide:

a) Calcular $\lim_{x\to -1} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

b) Demostrar que no tiene extremos relativos.

c) Demostrar que tiene un punto de inflexión para x = 0.

d) Hacer un dibujo de la función.

----

a)

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=\underline{-\infty} \\ \\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=\underline{+\infty} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow No\ existe}}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=\underline{+\infty} \\ \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=\underline{-\infty} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow No\ existe}}$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x^2-1}=\underline{\underline{0}} \quad (grado\ numerador < grado\ deno\min ador)$$

b)

Para estudiar los extremos relativos, derivamos:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=\underline{\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=f'(x)}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo y el denominador es siempre negativo, la derivada es negativa para cualquier valor real de x perteneciente al dominio de la función, que es $D(f)\Rightarrow R-\{1\}$, lo cual significa que f(x) es decreciente en su dominio.

La anterior implica que <u>la función no tiene máximos y mínimos relativos, c.q.d.</u>

c)

Para determinar los punto de inflexión estudiamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2x \cdot (x^2-1)^2 - (x^2+1) \cdot 2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \underline{\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = f''(x)}$$

Para que una función tengo un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-4)^3} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x=0}$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente: para asegurar que existe el punto de inflexión es necesario que no se anule la tercera derivada para ese valor:

$$f'''(x) = \frac{(6x^2+6) \cdot (x^2-1)^3 - 2x(x^2+3) \cdot 3 \cdot (x^2-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^6} =$$

$$= \frac{(6x^2+6) \cdot (x^2-1) - 12x^2(x^2+3)}{(x^2-1)^4} = \frac{6x^4 - 6x^2 + 6x^2 - 6 - 12x^4 - 36x^2}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{-6x^4 - 36x^2 - 6}{(x^2-1)^4} = \underline{\frac{-6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4} = f'''(x)}$$

$$\underline{\underline{\textit{Punto de inflexión para } x = 0,\ c.q.d.}}$$

d)

Para facilitar la representación gráfica determinamos las asíntotas:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

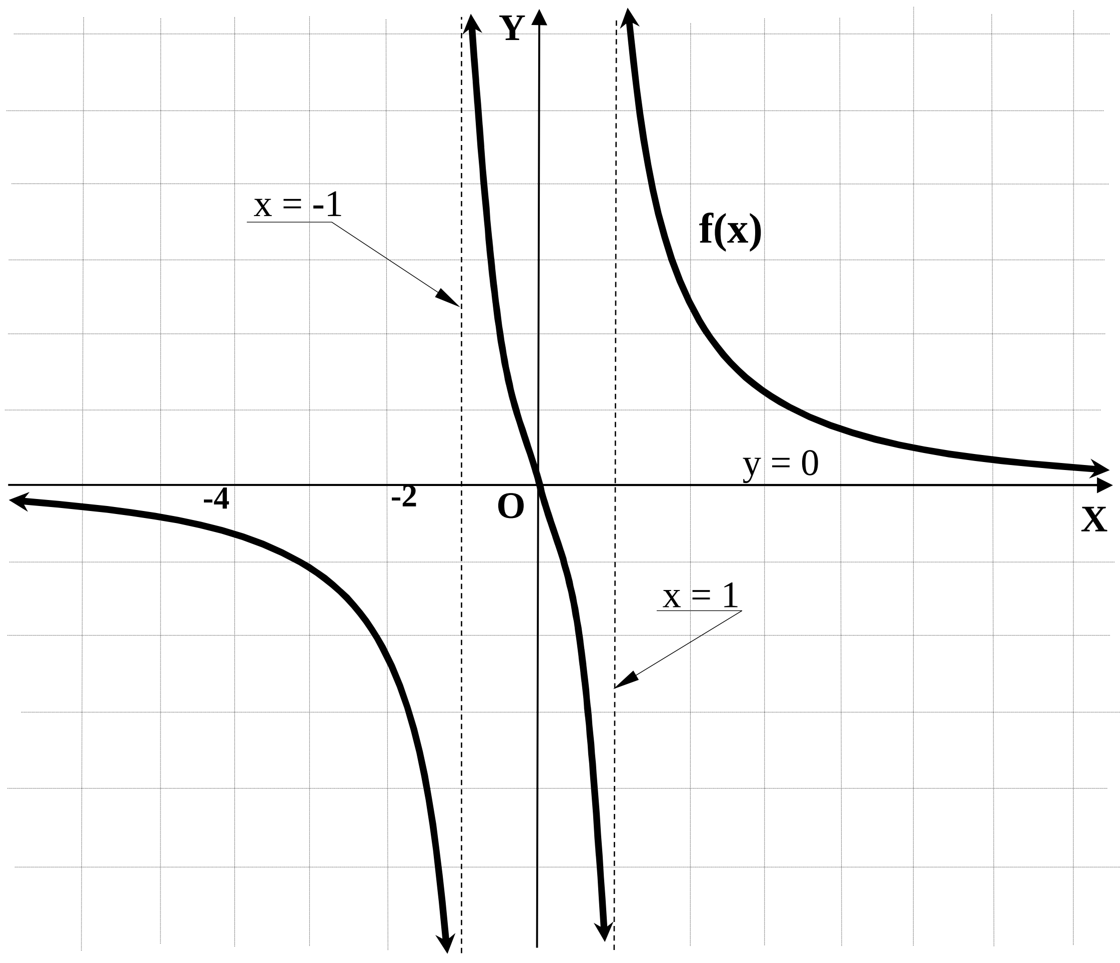
$$y = k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \underline{0 = y} \;\; (Eje\ \ X)$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \;;;\; x^2 = 1 \Rightarrow \underline{x_1 = 1} \;;;\; \underline{x_2 = -1}$$

Oblicuas: no tiene. (Para que una función fraccionaria tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el del denominador)

La represtación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.

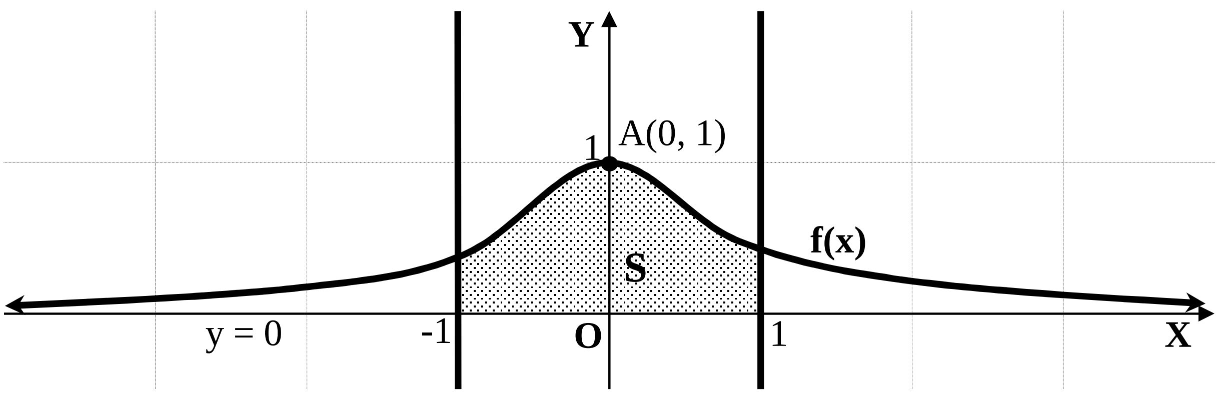


****

4º) Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y las rectas y = 0, x = -1 y x = 1. Hacer un dibujo aproximado del recinto.

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x \to \mp\infty} y = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, el eje de abscisas es la asíntota horizontal de la función. La función es par, por lo que es simétrica respecto al eje de ordenadas. $y = \frac{1}{1+x^2} > 0,\ \forall x \in R$.

Considerando que el punto A(0, 1) es un punto de la curva y todo lo anterior se puede hacer un dibujo aproximado de la curva, que es el indicado en la figura.



De la observación de la figura, teniendo en cuenta la simetría, el área pedida es:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = 2 \cdot [arc\ tag\ x]_0^1 = 2 \cdot (arc\ tag\ 1 - arc\ tag\ 0) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\, u^2 \cong 1'57\ u^2 = S}}$$

****